(a) $\{\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}\}$ *est libre* $\Leftrightarrow$ *le système homogène* $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ *n'admet que la solution triviale.*

(b) $\{\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}\}$ *est lié* $\Leftrightarrow$ *le système homogène* $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ *admet une infinité de solutions.*

2. $\{\overrightarrow{v}\}$ *est lié si et seulement si* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
3. *Tout ensemble de vecteurs contenant le vecteur nul est linéairement dépendant.*
4. $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ *est lié si et seulement si* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires.*

Théorème 1.1.4.59

Un ensemble de vecteurs $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_m}\}$ est lié si et seulement si au moins un de ces vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Démonstration. Supposons que $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_m}\}$ est lié. Alors il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ non tous nuls, tels que $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + \lambda_m\overrightarrow{v_m} = \overrightarrow{0}$. Si nécessaire, réordonnons les vecteurs de sorte que $\lambda_m \neq 0$. Dans ce cas, on peut réécrire $\lambda_m\overrightarrow{v_m} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + \lambda_{m-1}\overrightarrow{v_{m-1}}$, donc $\overrightarrow{v_m} = \frac{1}{\lambda_m}(\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + \lambda_{m-1}\overrightarrow{v_{m-1}})$

Supposons maintenant que l'un des vecteurs au moins soit combinaison linéaire des autres. Supposons, quitte à réordonner, que c'est v_m : $\overrightarrow{v_m} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + \lambda_{m-1}\overrightarrow{v_{m-1}}$. Cet ensemble de vecteurs est donc lié, puisque $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + \lambda_{m-1}\overrightarrow{v_{m-1}} - \overrightarrow{v_m} = \overrightarrow{0}$. Le dernier coefficient étant -1, les λ_i sont non tous nuls. $\square$

Exemple. Considérons les vecteurs $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$. On a alors la relation d'équivalence : $2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, et la combinaison linéaire $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

Théorème 1.1.4.60

Tout ensemble de vecteurs $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_m}\}$ de $\mathbb{R}^n$ est linéairement dépendant si $m > n$.

Démonstration. Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix}\overrightarrow{v_1} & \cdots & \overrightarrow{v_m}\end{bmatrix}$. Cette matrice a plus de colonnes que de lignes, les colonnes ne peuvent donc pas toutes être des colonnes pivots. Il y a donc des variables libres, donc des vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres. $\square$

Exemple. $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}10\\11\\12\end{bmatrix}\right\}$ est un ensemble lié de vecteurs, puisqu'il y a quatre vecteurs de dimension trois.

Remarque 1.1.4.61. *Attention ! Si $m \leq n$, on ne sait pas a priori si les vecteurs sont linéairement dépendant ou non. Par exemple, si $n = 3$ et $m = 2$, on a, d'une part,* $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ *qui sont indépendants, et d'autre part,* $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$ *qui sont dépendants.*

1.4.2 Bases de $\mathbb{R}^n$

Rappel. Un ensemble de vecteurs $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_m}\}$ engendre $\mathbb{R}^n$ si tout élément de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_m}$. Dans ce cas, $m \geq n$.

Définition 1.1.4.62 *Base de $\mathbb{R}^n$*

Une base de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble linéairement indépendant de vecteurs générateur de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.1.4.63. *Autrement dit, si $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_m}\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$, il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ réels, tels que $\overrightarrow{v} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + \lambda_m\overrightarrow{v_m}$, et $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_m}\}$ est libre.*

En fait, la spécificité d'une base par rapport à un ensemble de vecteurs générateurs, c'est qu'il y a unicité des $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$.

Exemple.

Dans $\mathbb{R}^2$, il est facile d'expliciter des bases. Il suffit d'avoir deux vecteurs non colinéaires. Par exemple : $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. En effet, c'est un ensemble libre de vecteurs, car la matrice échelonnée réduite de $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$ est $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$. Et c'est un ensemble générateur de $\mathbb{R}^2$, car la matrice échelonnée réduite de $\begin{bmatrix}1 & 1 & b_1\\1 & 2 & b_2\end{bmatrix}$ est $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2b_1 - b_2\\0 & 1 & b_2 - b_1\end{bmatrix}$. Donc tout vecteur $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$ vérifie l'égalité suivante :

$$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix} = (2b_1 - b_2)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + (b_2 - b_1)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$$

Remarque importante 1.1.4.64

Nous avons vu au théorème 1.1.4.60 que $m \leq n$. Nous avons aussi vu au corollaire 1.1.3.50 que $m \geq n$ (attention ! les rôles de n et m étaient inversés dans la formulation de ce corollaire). Donc finalement, $n = m$. Autrement dit, une base de $\mathbb{R}^n$ est toujours constituée de n vecteurs.

Définition 1.1.4.65 *Base canonique*

La base la plus simple de $\mathbb{R}^n$ est constituée de n vecteurs dont toutes les composantes sauf une vaut 0, l'autre vaut 1

$$\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

Elle est appelée base canonique.

La base canonique a un rôle essentiel en algèbre linéaire. Tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ peut être écrit de manière unique comme combinaison linéaire d'éléments de la base canonique. Typiquement,

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix} + \cdots + x_n\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}.$$

On notera généralement $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. L'ordre des vecteurs est important. La base $\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$ est différente de la base $\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$. Si l'on veut spécifier les vecteurs d'une base sans tenir compte de l'ordre, on la notera entre accolades. Par exemple, $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

1.5 Introduction aux applications linéaires

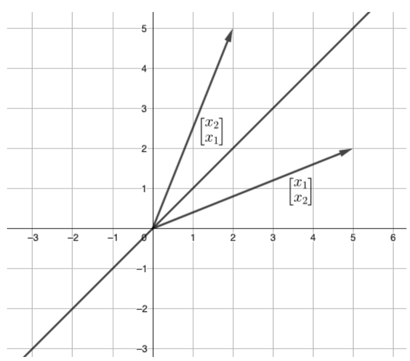
1.5.1 Introduction

Nous allons maintenant interpréter une matrice comme une application qui transforme des vecteurs, au même titre que les fonctions bien connues transforment les réels. Par exemple, $f(x) = x^2$ prend en entrée un nombre réel et retourne son carré.

Analysons à titre d'exemple, comment la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ transforme tout vecteur $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

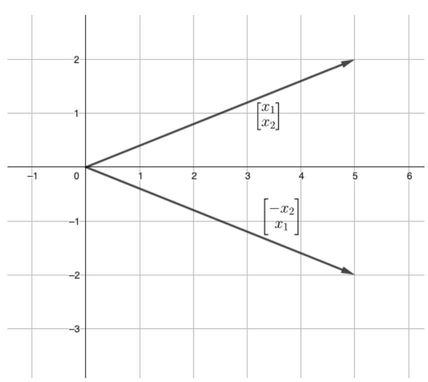
Donc cette matrice prend en entrée un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et elle permute ses coordonnées. Géométriquement, c'est une symétrie par rapport à la droite $y = x$:



Autre exemple : la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ transforme tout vecteur $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}.$$

Géométriquement, c'est une symétrie par rapport à l'axe des x :

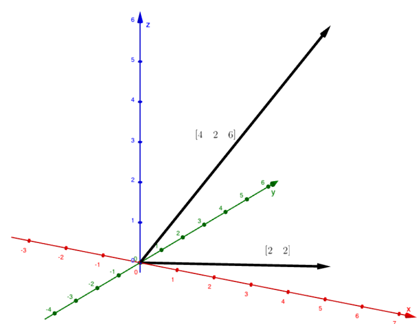


Sur ces deux exemples, nous constatons que la multiplication matrice-vecteur peut être interprétée comme une transformation de ce vecteur. Remarquons que pour une matrice à 2 colonnes, l'action est nécessairement sur un vecteur de $\mathbb{R}^2$, puisque le vecteur doit avoir autant de composantes que le nombre de colonnes de la matrice.

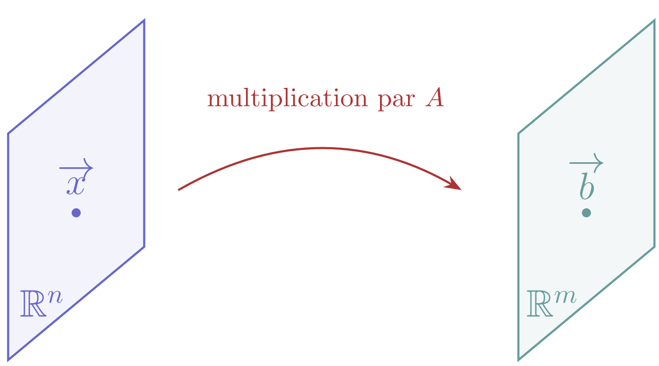
Considérons un exemple plus complexe. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Cette matrice a deux colonnes, elle va donc transformer un vecteur de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice transforme donc un vecteur de $\mathbb{R}^2$ en un vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont la troisième composante est la somme des deux premières. Le graphe suivant représente cela : le vecteur initial est un vecteur du plan (Oxy) et il est transformé vers un vecteur de l'espace $(Oxyz)$. Le graphique superpose le plan et l'espace (ce n'est pas rigoureux, mais cela permet une représentation claire).



Plus généralement, si A est une matrice à m lignes et n colonnes, $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$, alors l'égalité $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ s'interprète comme « A transforme $\overrightarrow{x}$ en $\overrightarrow{b}$ ».



1.5.2 Définition

Définition 1.1.5.66 *Transformation*

Une transformation T de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ est une opération qui assigne un unique vecteur $\overrightarrow{b}$ de $\mathbb{R}^m$ à chaque vecteur $\overrightarrow{x}$ de R^n. On note : $T: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \overrightarrow{x} & \longmapsto T(\overrightarrow{x}) \end{array}$

$\overrightarrow{x}$ est une préimage (ou antécédent) de $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{b}$ est une image de $\overrightarrow{x}$.

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est appelé domaine, ou ensemble de départ de T.
L'ensemble $\mathbb{R}^m$ est appelé codomaine, ou ensemble d'arrivée de T.

Remarque importante 1.1.5.67

Dans le cadre de ce cours, nous allons le plus souvent (si ce n'est tout le temps) considérer une transformation associée à une matrice. Autrement dit, soit A une matrice à m lignes et n colonnes, nous considèrerons la transformation $T: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \overrightarrow{x} & \longmapsto A\overrightarrow{x} \end{array}$.

Nous rappelons les propriétés de linéarité du produit matrice-vecteur précédemment vues au théorème 1.1.3.44 :

1. $A(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = A\overrightarrow{u} + A\overrightarrow{v}$
2. $A(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda A\overrightarrow{u}$

Définition 1.1.5.68 *Application linéaire*

Soit $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transformation. On dit que T est une application linéaire (ou transformation linéaire) si les deux propriétés suivantes sont vraies :

1. $T(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = T(\overrightarrow{u}) + T(\overrightarrow{v})$ pour tout $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$.
2. $T(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda T(\overrightarrow{u})$ pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

Exemples.

1. $T: \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x \end{array}$ est linéaire.
2. $T: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \overrightarrow{x} & \longmapsto \overrightarrow{x} \end{array}$ est linéaire.
3. $T: \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 3x \end{array}$ est linéaire.
4. $T: \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 3x+5 \end{array}$ n'est pas linéaire.
5. $T: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto 3x \end{array}$ est linéaire.
6. $T: \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2 \end{array}$, $T: \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sin(x) \end{array}$ ne sont pas linéaires.

7. $T : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ -x_1 + 5x_2 \end{bmatrix} \end{array}$ est linéaire.

8. $T : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} & \longmapsto & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{array}$ est linéaire.

9. $T : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix} \end{array}$ est linéaire.

Remarque importante 1.1.5.69 *Linéarité d'une transformation matricielle*

Si A est une matrice à m lignes et n colonnes, $T : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ x & \longmapsto & Ax \end{array}$ est linéaire, d'après la remarque 1.1.5.67.

Remarques 1.1.5.70. 1. *Pour montrer qu'une application n'est pas linéaire, il suffit d'expliciter un contre-exemple. Par exemple,* $T : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ *n'est pas linéaire, car* $T(1+1) \neq T(1) + T(1)$.

Exemple. $T : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & \longmapsto & x_1 x_2 \end{array}$ n'est pas linéaire, car $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 0, T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 0$, mais $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 1$.

2. *Il résulte de la définition que*

$$T(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}) = \lambda T(\overrightarrow{u}) + \mu T(\overrightarrow{v})$$

pour tout $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. *C'est aussi vrai pour un plus grand nombre de vecteurs :*

$$T(\lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{u_k}) = \lambda_1 T(\overrightarrow{u_1}) + \cdots + \lambda_k T(\overrightarrow{u_k})$$

Théorème 1.1.5.71 $T\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $T(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$.

Démonstration. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$, alors $T\left(\overrightarrow{0}\right) = T\left(0\overrightarrow{u}\right) = 0T\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}$. $\square$

Remarques 1.1.5.72.

1. *Attention, c'est une implication dans un sens seulement. Une transformation non-linéaire peut vérifier $T(0) = 0$, par exemple $T(x) = (x^2)$.*
2. *Attention, il se peut que pour une application linéaire, $T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$ avec $\overrightarrow{x} \neq 0$.*
3. *Ce théorème permet de montrer rapidement que certaines applications ne sont pas linéaires, grâce à sa contraposée. Par exemple,* $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x+5 \end{array}$ *n'est pas linéaire, car* $T(0) \neq 0$.

1.5.3 Matrice associée

Si l'on sort du cadre d'espace de départ et d'arrivée du type $\mathbb{R}^n$, il existe des transformation linéaires qui ne sont pas issues d'une matrice. Par exemple, la dérivée est linéaire : $(f+g)' = f' + g'$, et $(\lambda f)' = \lambda f'$. Mais l'espace de départ et l'espace d'arrivée de la transformation dérivée sont des espaces de fonction. Dans le cadre de ce cours, nous allons généralement nous restreindre aux espaces du type $\mathbb{R}^n$. Le théorème suivant devient alors fondamental.

Théorème 1.1.5.73 *Matrice associée à une application linéaire*

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors il existe une matrice A à m lignes et n colonnes, telle que $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$ pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. On appelle cette matrice, une matrice associée à T.

Démonstration. La définition 1.1.5.76 fournit un exemple d'une telle matrice, et prouve donc le théorème. $\square$

Remarques 1.1.5.74.

1. *Essayer de bien comprendre le lien entre les dimensions des espaces de départ et d'arrivée et la taille de la matrice.*
2. *Nous avons bien écrit **une** matrice associée (et pas la matrice associée). Nous ne nous attarderons pas sur cela pour l'instant, mais cette nuance sera abondamment détaillée dans la suite du cours. Toutefois, avant d'approfondir ce point-là, nous ne considérons que la matrice canoniquement associée, définie en 1.1.5.76.*

Exemples. 1. $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ -x_1 + 5x_2 \end{bmatrix} \end{array}$ est linéaire. On a :

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ -x_1 + 5x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_2 \\ 5x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

2. $\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} & \longmapsto & x_1+x_2+x_3+x_4 \end{array}$ est linéaire. On a :

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = x_1+x_2+x_3+x_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

3. $\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \\ -x_1+x_2 \\ -x_1-x_2 \end{bmatrix} \end{array}$ est linéaire. On a

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \\ -x_1+x_2 \\ -x_1-x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

4. L'exemple suivant est fondamental. $\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \overrightarrow{x} & \longmapsto & \overrightarrow{x} \end{array}$ est linéaire. Soit $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, alors si $(e_1, \cdots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$. Donc la matrice associée à cette transformation est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$.

Définition 1.1.5.75 *Matrice identité*

La matrice identité de $\mathbb{R}^n$, notée $\mathbb{I}_n$, est la matrice à n lignes et n colonnes qui a des 0 partout sauf sur la diagonale, où il y a des 1 : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$. Elle est associée à l'application linéaire $\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \overrightarrow{x} & \longmapsto & \overrightarrow{x} \end{array}$.

Dans les exemples précédents, nous avons décomposé l'application linéaire pour en déduire sa matrice associée. Ce calcul est immédiat avec la base canonique. En fait, dans chaque exemple précédent, nous avons calculé une matrice particulière associée aux applications linéaires, à savoir la matrice canoniquement associée.

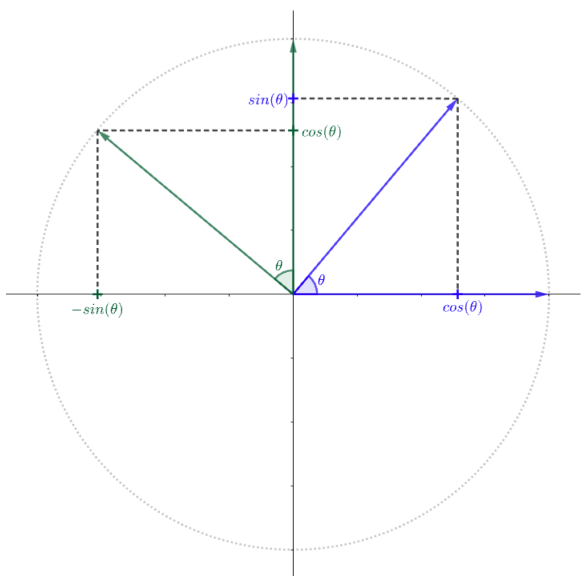
Définition 1.1.5.76 *Matrice canoniquement associée*

Soit T une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. La matrice à m lignes et n colonnes dont les colonnes sont les images des n vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ $(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n})$:

$$\begin{bmatrix} T(\overrightarrow{e_1}) & \cdots & T(\overrightarrow{e_n}) \end{bmatrix}$$

est appelée la matrice canoniquement associée à T.

Exemple. Soit $\rho_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ autour de l'origine, dans le sens trigonométrique.



Calculons :

$$\rho_\theta\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}, \rho_\theta\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$$

Donc la matrice canoniquement associée à cette rotation est $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$. Donc pour tout $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\rho_\theta\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\cos\theta - y\sin\theta\\ x\sin\theta + y\cos\theta\end{bmatrix}$$

1.5.4 Injectivité et surjectivité

Définition 1.1.5.77 *Image d'une application linéaire*

Soit T une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Alors l'ensemble $\left\{\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n,\ T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}\right\}$ est appelé image de T, noté $\mathrm{Im}(T)$. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$, c'est l'ensemble de toutes les images par T.

Définition 1.1.5.78 *Surjectivité*

Une application T de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est dite surjective si tout vecteur $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ (l'espace d'arrivée) est l'image d'au moins un vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ (l'espace de départ).
Autrement dit, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^m$.

Exemples. 1. $\mathbb{I}_n$ est surjective

2. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} \end{array}$ est surjective. En effet, soit $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, alors $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} b_3 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ vérifie $u(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}$.

3. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{array}$ est surjective. En effet, soit $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, alors $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ t \end{bmatrix}$ vérifie $u(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$.

4. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$ n'est pas surjective. En effet, $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{R}^3$ si $b_3 \neq 0$. $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Remarque 1.1.5.79. *Pour montrer qu'une application $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ n'est pas surjective, il suffit d'expliciter un vecteur de $\mathbb{R}^m$ qui n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{R}^n$.*

Rappel, théorème 1.1.3.48 :

Théorème 1.1.5.80

Soit A une matrice à m lignes et n colonnes. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. Quel que soit $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m, A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ admet au moins une solution.
2. Quel que soit $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$, $\overrightarrow{b}$ est combinaison linéaire des colonnes de A.
3. Vect $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) = \mathbb{R}^m$. C'est-à-dire que les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$.
4. Chaque ligne de A possède un pivot.

Il se reformule dorénavant :

Théorème 1.1.5.81

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire, et A sa matrice canoniquement associée. Alors les énoncés suivants sont équivalents

1. T est surjective
2. Quel que soit $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m, A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ admet au moins une solution.
3. Quel que soit $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$, $\overrightarrow{b}$ est combinaison linéaire des colonnes de A
4. Vect $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_n}) = \mathbb{R}^m$. C'est-à-dire que les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$.
5. Chaque ligne de A possède un pivot.

Définition 1.1.5.82 *Injectivité*

Une application T de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est dite injective si tout vecteur $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ (l'espace d'arrivée) est l'image d'au plus un vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ (l'espace de départ).

Remarque 1.1.5.83. *« Au plus un » signifie un ou zéro.*

Exemples. 1. $\mathbb{I}_n$ est injective

2. $$T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} \end{array}$$ est injective. En effet, soit $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ et supposons que $\overrightarrow{b}$ a pour antécédents $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$. Alors $T(\overrightarrow{x}) = T(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{b}$. Donc $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_1 \end{bmatrix}$, donc $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$. Donc $\overrightarrow{b}$ ne peut pas avoir deux antécédents différents, donc il en a au plus un.

3. $\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{array}$ n'est pas injective. Par exemple, le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ admet au moins

   deux antécédents : $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (il y en a une infinité).

4. $\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$ n'est pas injective. Par exemple, le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ admet au moins

   deux antécédents : $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (il y en a une infinité).

Remarque 1.1.5.84. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes*

1. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est injective.*
2. *quel que soit* $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$, $T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}$ *admet au plus une solution.*
3. *quel que soit* $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$, *si* $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{y}$, *alors* $T(\overrightarrow{x}) \neq T(\overrightarrow{y})$.

Théorème 1.1.5.85 *Noyau d'une application linéaire injective*

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire. Alors

$$\text{T est injective} \Leftrightarrow T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \text{ n'admet que la solution triviale.}$$

Démonstration. — Commençons par montrer l'implication

$$T \text{ est injective } \Rightarrow T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \text{ n'admet que la solution triviale.}$$

On sait que si T est injective, alors $T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$ admet au plus une solution. Or $T(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$ car T est linéaire, c'est donc la seule solution.

— Montrons maintenant,

$$T \text{ est injective } \Leftarrow T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \text{ n'admet que la solution triviale.}$$

Pour cela, montrons la contraposée :

$$T \text{ n'est pas injective } \Rightarrow T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \text{ admet d'autres solutions que la solution triviale.}$$

Si T n'est pas injective, alors il existe $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{v}$ tels que $T(\overrightarrow{u}) = T(\overrightarrow{v})$. Dans ce cas, $T(\overrightarrow{u}) - T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$, donc $T(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$ car T est linéaire. On a donc une solution non triviale $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ de $T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$.

□

Définition 1.1.5.86 *Noyau d'une application linéaire*

Soit T une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Alors, l'ensemble $\left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n : T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}\right\}$ est appelé noyau de T, noté $\ker(T)$. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ (ensemble de départ).

Remarques 1.1.5.87 (remarque injectivité-noyau)**.** *Si T est injective, alors le théorème 1.1.5.85 indique que* $\ker(T) = \{\overrightarrow{0}\}$.

Définition 1.1.5.88 *Application bijective*

Une application bijective est une application qui est à la fois injective et surjective.

Chapitre 2 : Calcul matriciel

2.1 Opérations matricielles

Les opérations sur les vecteurs vues dans le chapitre précédent s'étendent naturellement aux matrices. On dit que deux matrices A et B de taille $m \times n$ sont égales si elles ont la même taille et que les coefficients sont tous égaux deux à deux : pour tout $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, $a_{ij} = b_{ij}$.

— Nous noterons $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $m \times n$.
— Nous dirons qu'une matrice est carrée si elle a autant de lignes que de colonnes. On pourra dire qu'une matrice de taille $n \times n$ est carrée de taille n.
— Nous noterons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$.
— Nous noterons $0_{m \times n} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, la matrice $m \times n$ dont toutes les composantes sont nulles.
— Nous noterons $0_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont nuls.
— Nous noterons $\mathbb{I}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice carrée de taille n dont toutes les composantes sont nulles hors de la diagonale et valent 1 sur la diagonale.
— Une matrice est dite diagonale si tous ses coefficients sont nuls, sauf ceux qui sont sur la diagonale : $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
— Une matrice est triangulaire supérieure si tous les coefficients strictement au-dessous de la diagonale sont nuls.
— Une matrice est triangulaire inférieure si tous les coefficients strictement au-dessus de la diagonale sont nuls.

2.1.1 Somme de deux matrices et multiplication par un scalaire

Somme de deux matrices

Soit $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ deux matrices $m \times n$, alors la somme $A + B$ est la matrice $m \times n$ donnée par :

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Remarque importante 2.1

Attention, on ne peut additionner que des matrices de même taille.